



DIRECCIÓ D'OPERACIONS I INNOVACIÓ
INVESTIGACIÓ OPERATIVA. PROGRAMACIÓ LINEAL

ESADE MBA – PART TIME 1er curs, Grup A

OLGA LOPEZ RAMA
JULIÀ GOMEZ MARTINEZ
JAUME GUASCH GUTSENS
IGNACIO JULVE PEREZ

El salvament del Titànic amb Programació Lineal

1.- Introducció

El luxós vaixell britànic anomenat Titànic es fa enfonsar la nit del 14 al 15 d'abril de 1912 en la seva ruta inaugural de Southampton, Anglaterra a Nova York. El vaixell s'enfonsà emportant-se unes 1.500 vides amb ell a uns 640 km de les costes de Newfoundland als Estats Units.



El Titànic, en aquells temps l'enginy flotant més gran i luxós mai construït, va ser dissenyat i construït per Harland & Wolff a Belfast per donar servei a la competitiva ruta atlàntica per la companyia White Star Lines. El vaixell tenia un doble fons que s'havia dividit en 16 compartiments estancs dels quals 4

podien estar inundats sense posar en perill la flotabilitat de la nau. Per aquesta raó, el vaixell era considerat inenfonçable.

Poc després de mitjanit del dia 14 d'abril, el vaixell col·lisionà amb un iceberg i cinc dels compartiments estancs varen quedar oberts i inundats causant l'enfonsament del vaixell a les 2:20 de la matinada del 15 d'abril. Investigacions posteriors dutes a terme a la Gran Bretanya i als Estats Units demostraren que el vaixell California de la companyia Leyland hagues pogut evitar l'alt nombre de morts si hagués tingut el seu radiotelegrafista de guàrdia per captar els senyals d'auxili del Titànic doncs, aquella nit, es trobava a menys de 32 km de distància. Finalment, l'arribada del Carpathia de la companyia Cunard 1 hora i 20 minuts després de l'enfonsament va poder rescatar els pocs supervivents que escapaven d'una mort segura en aigües de l'Atlàntic. Investigacions posteriors demostraren també que l'acer del casc es va comportar de manera molt fràgil degut a les baixes temperatures i la poca qualitat del mateix.

El glamour associat amb el vaixell, l'accident en el viatge inaugural i la importància de molts dels seus passatgers varen magnificar la història convertint-la en mítica. S'ha investigat i escrit molt sobre el desastre i avui en dia fins i tot es poden trobar grups de discussió altament documentats en internet sobre el Titànic i la seva història. Com a conseqüència d'aquella tragèdia es varen fer importants modificacions en la reglamentació de seguretat naval com garantir les places suficients en els bots salvavides o mantenir l'escolta dels radiotelegrafistes les 24 hores. Fins i tot es va constituir una patrulla de vigilància contra icebergs per les aigües de l'Atlàntic nord per poder prevenir efectivament les línies comercials.

L'objectiu d'aquest problema es el de comparar les xifres de supervivents de l'accident amb les que un capità i uns oficials coneixedors de les tècniques de programació lineal i altes dosis de sang freda i organització haguessin pogut aconseguir. Hom considera les mateixes condicions conegudes en quant a número de passatgers i tripulants, número, tipus i capacitat de bots etc. Cal refer l'estratègia del salvament tot emprant un plantejament de programació lineal i comparar el resultat amb el documentat.

2.- Les dades del problema

A bord del Titànic hi havia 2.228 persones segons la següent distribució:

Categoria	Homes	Dones	Nens	Total
Passatgers 1 ^a	125	115	97	337
Passatgers 2 ^a	99	96	90	285
Passatgers 3 ^a	360	195	166	721
Tripulació	590	295	0	885
TOTAL	1.174	701	353	2.228

Com elements de salvament, hi havia, a més de 3.560 armilles salvavides, 49 boies i un total de 20 bots amb les següents característiques:

Tipus de Bot	Quantitat de bots	Capacitat màxima	Pes màxim aprox.
Bot salvavides gran de fusta	14	65	5.525
Bot salvavides petit de fusta	2	40	3.400
Bot plegable Englehardt	4	45	3.825
TOTAL	20	1.178	



La capacitat màxima fa referència al nombre màxim d'adults (homes i dones) fonamentalment per qüestions de pes i superfície. Considerem el pes mig dels adults homes de 85Kg i el de les dones de 65Kg mentre que pels nens de 45Kg, la qual cosa ens dona l'estimació del pes màxim per bot.

Per tal de poder controlar els bots calia un mínim de 5 homes adults en els bots de fusta grans, 3 en els de fusta petits i un mínim de 4 en els plegables.

Donat a les temperatures gèlides de les aigües de l'Atlàntic nord, i degut al temps d'espera entre l'enfonsament i el posterior rescat per part del Carpathia, no es considera efectiu el salvament basat exclusivament en les armilles.

Les dades oficials de l'enfonsament ens donen les següents xifres de víctimes:

Categoria	Supervivents en %	Supervivents	Víctimes
Passatgers 1 ^a	60	202	135
Passatgers 2 ^a	44	125	160
Passatgers 3 ^a	25	180	541
Tripulació	22	198	687
TOTAL		705	1523

Un total de 13 bots amb 705 supervivents varen ser rescatats finalment pel vaixell Carpathia.

3.- El problema

Cal trobar el programa lineal que maximitzi el número de supervivents tot respectant les limitacions i les dades donades anteriorment i de forma que a més es compleixi que el salvament és igualitari i no atenent a les classes socials.



4.- La Solució

Si considerem que en els bots grans, petits i plegables poden anar homes, dones i nens, podem definir les variables com el nombre de homes/dones/nens que es salven en el total de bots grans/petits/plegables.

	HOMES	DONES	NENS
BOT GRAN	X_1	X_2	X_3
BOT PETIT	X_4	X_5	X_6
BOT PLEGABLE	X_7	X_8	X_9

Les restriccions que trobem són:

- Per número de passatgers:
 - Homes: $X_1 + X_4 + X_7 \leq 1174$ (1)
 - Dones: $X_2 + X_5 + X_8 \leq 701$ (2)
 - Nens: $X_3 + X_6 + X_9 \leq 353$ (3)
- Per pes:
 - Bot gran: $85X_1 + 65X_2 + 45X_3 \leq 77350$ (4)
 - Bot petit: $85X_4 + 65X_5 + 45X_6 \leq 6800$ (5)
 - Bot plegable: $85X_7 + 65X_8 + 45X_9 \leq 15300$ (6)
- Per número mínim d'homes en bots (suposant que es repartiran per igual):
 - Bot gran: $X_1 \geq 70$ (7)
 - Bot petit: $X_4 \geq 6$ (8)
 - Bot plegable: $X_7 \geq 16$ (9)
- Per capacitat del bots:
 - Bot gran: $X_1 + X_2 + X_3 \geq 65 \cdot 14 = 910$ (10)
 - Bot petit: $X_4 + X_5 + X_6 \geq 40 \cdot 2 = 80$ (11)
 - Bot plegable: $X_7 + X_8 + X_9 \geq 45 \cdot 4 = 180$ (12)

La funció a maximitzar serà:

$$\text{Màx} \ z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9$$

Summarized Results for TITANIC						Page : 1	
Variables		Obj. Fnctn.		Variables		Obj. Fnctn.	
No.	Names	Solution	Coefficient	No.	Names	Solution	Coefficient
1	X1	+425.05887	+1.0000000	6	X6	+134.00000	+1.0000000
2	X2	+630.00000	+1.0000000	7	X7	+16.0000000	+1.0000000
3	X3	+5.9999371	+1.0000000	8	X8	+66.999977	+1.0000000
4	X4	+6.0000000	+1.0000000	9	X9	+213.00005	+1.0000000
5	X5	+4.0000000	+1.0000000				

Maximized objective function = 1501.059 No. of iterations = 44

La taula anterior ens mostra el resultat obtingut amb QSB utilitzant el mètode de la programació lineal amb números enters.

Les solucions obtingudes són amb un grau d'error del 0.1 en lloc del 0.01 perquè el programa després de 24 hores encara no havia pogut trobar l'òptim.

Aquest resultat ens diu que com a màxim es salvaran 1501 persones repartides de la següent manera:

- $X_1 = 425$: es salvaran 425 homes en el total de bots grans.
- $X_2 = 630$: es salvaran 630 dones en el total de bots grans.
- $X_3 = 6$: es salvaran 6 nens en el total de bots grans.
- $X_4 = 6$ es salvaran 6 homes en el total de bots petits.
- $X_5 = 4$: es salvaran 4 dones en el total de bots petits.
- $X_6 = 134$: es salvaran 134 nens en el total de bots petits.
- $X_7 = 16$ es salvaran 16 homes en el total de bots plegables.
- $X_8 = 67$: es salvaran 67 dones en el total de bots plegables.
- $X_9 = 213$: es salvaran 213 nens en el total de bots plegables.

Si resollem el mateix problema amb programació lineal sense enters obtenim els resultats que apareixen en la següent taula.

Summarized Results for titanic						Page : 1	
Variable		Opportunity		Variable		Opportunity	
No.	Names	Solution	Cost	No.	Names	Solution	Cost
1	X1	+425.05890	0	15	S6	0	+0.01176471
2	X2	+389.76920	0	16	S7	+355.05890	0
3	X3	+353.00000	0	17	A7	0	0
4	X4	+6.0000000	0	18	S8	0	0
5	X5	+96.769234	0	19	A8	0	0
6	X6	0	0	20	S9	0	0
7	X7	+16.000000	0	21	A9	0	0
8	X8	+214.46155	0	22	S10	+257.82809	0
9	X9	0	0	23	A10	0	0
10	S1	+726.94110	0	24	S11	+22.769234	0
11	S2	0	+0.23529412	25	A11	0	0
12	S3	0	+0.47058824	26	S12	+50.461552	0
13	S4	0	+0.01176471	27	A12	0	0
14	S5	0	+0.01176471				

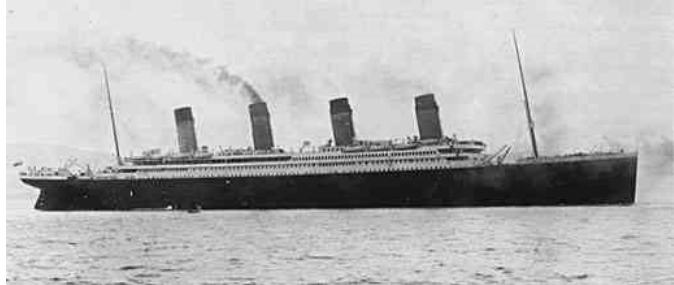
Maximized OBJ. function = 1501.059 ITERS. = 11

Aquest resultat ens diu que com a màxim es salvaran 1501 persones repartides de la següent manera:

- $X_1 = 425$: es salvaran 425 homes en el total de bots grans.
- $X_2 = 390$: es salvaran 390 dones en el total de bots grans.
- $X_3 = 353$: es salvaran 353 nens en el total de bots grans.
- $X_4 = 6$: es salvaran 6 homes en el total de bots petits.
- $X_5 = 97$: es salvaran 97 dones en el total de bots petits.
- $X_6 = 0$: no es salvarà cap nen en el total de bots petits.
- $X_7 = 16$: es salvaran 16 homes en el total de bots plegables.
- $X_8 = 214$: es salvaran 214 dones en el total de bots plegables.
- $X_9 = 0$: no es salvarà cap nen en el total de bots plegables.
- $S_1 = 727$: no es salvaran 727 homes.
- $S_2 = 0$: es salvaran totes les dones.
- $S_3 = 0$: es salvaran tots els nens.
- $S_4 = 0$: els bots grans suportaran el màxim pes possible.
- $S_5 = 0$: els bots petits suportaran el màxim pes possible.
- $S_6 = 0$: els bots plegables suportaran el màxim pes possible.
- $S_7 = 355$: en els bots grans aniran 355 homes més dels necessaris per poder controlar-los.
- $S_8 = 0$: en els bots petits aniran només els homes necessaris per poder controlar els bots.
- $S_9 = 0$: en els bots plegables aniran només els homes necessaris per poder controlar-los.
- $S_{10} = 258$: en els bots grans van 258 persones més que si només haguessin anat homes.
- $S_{11} = 23$: en els bots petits van 23 persones més que si només haguessin anat homes.
- $S_{12} = 50$: en els bots plegables van 50 persones més que si només haguessin anat homes.

Veiem que la repartició és diferent en ambdós casos, encara que sempre es salva el mateix número de persones, el màxim possible.

Per poder fer un anàlisi de sensibilitat més acurat considerarem que tots els bots són iguals i que cadascun pugui suportar un pes de 4000 kg i suprimim les restriccions que havíem fet abans referides al número d'homes que com a mínim es necessitava per controlar un bot al considerar que hi hauran prou homes i també la restricció que afecta a la capacitat de número de persones que poden anar al bot depenent de si són adults o nens.



Les noves variables serien:

- X_1 : número d'homes que es salven en el total dels bots.
- X_2 : número de dones que es salven en el total dels bots.
- X_3 : número de nens que es salven en el total dels bots.

Les noves restriccions són:

- Per número de passatgers:
 - Homes: $X_1 \leq 1174$ (1)
 - Dones: $X_2 \leq 701$ (2)
 - Nens: $X_3 \leq 353$ (3)
- Per pes:
 - $85X_1 + 65X_2 + 45X_3 \leq 4000 \cdot 20 = 80000$ (4)

La funció a maximitzar serà:

$$\text{Màx} z = X_1 + X_2 + X_3$$

Resolent aquest plantejament amb el QSB i considerant solucions enteres per poder treballar amb les taules de sensibilitat els resultats que obtenim són els que es mostren a les següents taules:

```

-----
|                               Summarized Results for titanica                               | Page : 1 |
-----
| Variable | Opportunity | Variable | Opportunity |
| No. Names | Solution | Cost | No. Names | Solution | Cost |
-----+-----+-----+-----+-----+-----
| 1 X1 | +218.23529 | 0 | 5 S2 | | +.23529412 |
| 2 X2 | +701.00000 | 0 | 6 S3 | | +.47058824 |
| 3 X3 | +353.00000 | 0 | 7 S4 | | +.01176471 |
| 4 S1 | +955.76471 | 0 | | | |
-----
|                               Maximized OBJ. function = 1272.235 ITERS. = 3                               |
-----

```

```

-----
|                               Sensitivity Analysis for Objective Coefficients                               | Page : 1 |
-----
| Variable | Min. C(j) | Original | Max. C(j) | Variable | Min. C(j) | Original | Max. C(j) |
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----
| X1 | 0 | +1.00000 | +1.30769 | X3 | +.529412 | +1.00000 | +Infinity |
| X2 | +.764706 | +1.00000 | +Infinity | | | | |
-----

```

```

-----
|                               Sensitivity Analysis for RHS                               | Page : 1 |
-----
| Constrnt | Min. B(i) | Original | Max. B(i) | Constrnt | Min. B(i) | Original | Max. B(i) |
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----
| 1 | +218.235 | +1174.00 | +Infinity | 3 | 0 | +353.000 | +765.222 |
| 2 | 0 | +701.000 | +986.385 | 4 | +61450.0 | +80000.0 | +161240 |
-----

```

$Z = 1272$: el número màxim de persones que es poden salvar és de 1272.

$X_1 = 218$: es salvaran 218 homes en el total de bots.

$X_2 = 701$: es salvaran totes les dones.

$X_3 = 353$: es salvaran tots els nens.

$S_1 = 956$: no es salvaran 956 homes.

$S_2 = 0$: es salvaran totes les dones.

$S_3 = 0$: es salvaran tots els nens.

$S_4 = 0$: els bots van a la seva màxima capacitat de pes disponible.

Les autoritats obliguen als constructors dels bots a una elasticitat del pes a resistir de +1200 kg, per tant, en realitat els bots podrien suportar un total de 5200 kg cada bot. Amb aquestes noves condicions i considerant que el capità era coneixedor d'aquesta circumstància, quina quantitat de gent es podria haver salvat?.

Aquesta modificació afectaria la quarta restricció de manera que el terme independent passa de 80000 a 104000. Com aquest valor es manté dins de l'interval de sensibilitat (61450 – 161240), podem afirmar que la base es manté i la nova funció objectiu serà el resultat de multiplicar la diferència (24000) pel valor de l'oportunitat cost (0.0117) de S_4 : $24000 * 0.0117 = 281$.

$$Z = 1272 + 281 = 1553 \text{ persones que es podrien haver salvat.}$$

Donat que totes les dones i tots els nens ja es salvaven sense augmentar la capacitat dels bots, veiem que als homes els interessa adonar-se d'aquesta nova possibilitat.

Obviant l'apartat anterior i considerant el dramatisme de la situació, fins el punt que ha donat per fer l'argument d'una pel·lícula guanyadora d'Oscars, la situació de pànic extrem va motivar que només es rescatessin 13 bots, és a dir, es van destruir 7 bots a causa de l'histerisme general dels passatgers. Quantes persones s'haguessin pogut salvar si haguessin mantingut la calma?

Aquesta nova situació afectaria també la quarta restricció de manera que el terme independent passa de 80000 a 52000. Com aquest valor no es manté dins de l'interval de sensibilitat (61450 – 161240), haurem de tornar a iterar com si d'un simplex nou es tractés.

Les taules que obtenim amb el QSB són:

```

-----
|                               Summarized Results for titanicb                               | Page : 1 |
-----
| Variable | Opportunity | Variable | Opportunity |
| No. Names | Solution | Cost | No. Names | Solution | Cost |
-----
| 1 X1 | 0 | +.30769232 | 5 S2 | +145.38461 | 0 | |
| 2 X2 | +555.61536 | 0 | 6 S3 | 0 | +.30769232 |
| 3 X3 | +353.00000 | 0 | 7 S4 | 0 | +.01538462 |
| 4 S1 | +1174.0000 | 0 | | | | |
-----
|                               Maximized OBJ. function = 908.6154 ITERS. = 3                               |
-----

```

```

-----
|                               Sensitivity Analysis for Objective Coefficients                               | Page : 1 |
-----
| Variable | Min. C(j) | Original | Max. C(j) | Variable | Min. C(j) | Original | Max. C(j) |
-----
| X1 | -Infinity | +1.00000 | +1.30769 | X3 | +.692308 | +1.00000 | +Infinity |
| X2 | +.764706 | +1.00000 | +1.44444 | | | | |
-----

```

```

-----
|                               Sensitivity Analysis for RHS                               | Page : 1 |
-----
| Constrnt | Min. B(i) | Original | Max. B(i) | Constrnt | Min. B(i) | Original | Max. B(i) |
-----
| 1 | 0 | +1174.00 | +Infinity | 3 | +143.000 | +353.000 | +1155.56 |
| 2 | +555.615 | +701.000 | +Infinity | 4 | +15885.0 | +52000.0 | +61450.0 |
-----

```

La nova Z resultant és 909, per tant, veiem una disminució de 363, és a dir, a causa del pànic han mort 363 persones inútilment. Les conseqüències han estat més greu del que sembla ja que no es salva cap home i hi ha dones (145) que tampoc es salven. Afortunadament tots els nens es continuen salvant.

Com no es salva cap home i per controlar els 13 bots és necessari que hi hagin 4 homes com a mínim per bot, haurem d'afegir una nova restricció: $X_1 \geq 52$. Com afectaria aquesta nova restricció?

Summarized Results for titanicc.dat						Page : 1	
Variable		Opportunity		Variable		Opportunity	
No.	Names	Solution	Cost	No.	Names	Solution	Cost
1	X1	+52.000000	0	6	S3	0	+30769232
2	X2	+487.61539	0	7	S4	0	+01538462
3	X3	+353.00000	0	8	S5	0	+30769232
4	S1	+1122.0000	0	9	A5	0	-30769232
5	S2	+213.38461	0				

Maximized OBJ. function = 892.6154 ITERS. = 4

Sensitivity Analysis for Objective Coefficients							Page : 1
Variable	Min. C(j)	Original	Max. C(j)	Variable	Min. C(j)	Original	Max. C(j)
X1	-Infinity	+1.00000	+1.30769	X3	+0.692308	+1.00000	+Infinity
X2	+0.764706	+1.00000	+1.44444				

Sensitivity Analysis for RHS								Page : 1
Constrnt	Min. B(i)	Original	Max. B(i)	Constrnt	Min. B(i)	Original	Max. B(i)	
1	+52.0000	+1174.00	+Infinity	4	+20305.0	+52000.0	+65870.0	
2	+487.615	+701.000	+Infinity	5	0	+52.0000	+424.882	
3	+44.7778	+353.000	+1057.33					

Els valors resultants són:

Un empitjorament de la funció objectiu que passa a ser 893 persones. Es salven el mínim d'homes imposat per la nova restricció (suposem que es repartiran per igual en el total dels bots), tots els nens i només 488 dones.

Veient les poques possibilitats que tenen els adults de salvar-se, es proposa que tots ells no utilitzin armelles salvavides (cadascuna pesa aproximadament uns cinc quilos). Com afecta aquestes modificacions dels coeficients tecnològics de la restricció 4?

Per saber-ho cal iterar de nou amb el QSB. Les solucions que s'obtenen són:

Summarized Results for titanicd						Page : 1	
Variable		Opportunity		Variable		Opportunity	
No.	Names	Solution	Cost	No.	Names	Solution	Cost
1	X1	+52.000000	0	6	S3	0	+25000000
2	X2	+532.58331	0	7	S4	0	+01666667
3	X3	+353.00000	0	8	S5	0	+33333334
4	S1	+1122.0000	0	9	A5	0	-33333334
5	S2	+168.41667	0				

Maximized OBJ. function = 937.5833 ITERS. = 4

Sensitivity Analysis for Objective Coefficients							Page : 1
Variable	Min. C(j)	Original	Max. C(j)	Variable	Min. C(j)	Original	Max. C(j)
X1	-Infinity	+1.00000	+1.33333	X3	+0.750000	+1.00000	+Infinity
X2	+0.750000	+1.00000	+1.33333				

Sensitivity Analysis for RHS							Page : 1
Constrnt	Min. B(i)	Original	Max. B(i)	Constrnt	Min. B(i)	Original	Max. B(i)
1	+52.0000	+1174.00	+Infinity	4	+20045.0	+52000.0	+62105.0
2	+532.583	+701.000	+Infinity	5	0	+52.0000	+451.438
3	+128.444	+353.000	+1063.11				

La nova funció objectiu és de 938 persones. Hem donat l'oportunitat de salvar-se a 45 dones.



Considerem que en el salvament del Titànic el propòsit a maximitzar és el número de vides i sota aquesta perspectiva hem treballat el tema de la sensibilitat. Només resta per dir, que amb unes altes dosis de sang freda i coneixements d'una eina per prendre decisions com és la programació lineal queda demostrat que en l'enfonsament del Titànic es van perdre vides innecessàriament.